

# Matematikens påvirkning af fysikken



Af: Michael Cramer Andersen, astrofysiker og redaktør af Kvant

Når matematikken anvendes i f.eks. fysikken er det en kæmpe fordel at de matematiske resultater er blevet bevist, så man kan være sikker på at de er gyldige. I den forbindelse gør det ikke noget, at beviserne er flere hundrede år gamle. Her vises nogle eksempler fra videnskabens historie, hvor matematikken har spillet både positivt og negativt ind på beskrivelsen af verden. Pythagoræerne mente at alt var tal, hvilket godt kunne føre til vildfarelser. I renæssancen blev dynamiske naturlove udviklet og førte til differentialregningen. En af de største intellektuelle kraftpræstationer i det 20. århundrede var Einsteins almene relativitetsteori, hvor ny matematik igen kom til at præge den måde verden beskrives på. I dag krydser fysikken og matematikken for alvor klinger i strengteorien.

## Matematisk skønhed

De grundlæggende love i fysikken benytter mange forskellige dele af matematikken, f.eks.: vektorfelter (elektromagnetisme), sandsynligheder og komplekse tal (kvantemekanik), gruppeteori (partikelfysik) og differentialgeometri (Einsteins almene relativitetsteori). En af drivkræfterne i udviklingen af disse områder af fysikken har været ønsket om at de fundamentale naturlove skulle opfylde forskellige symmetrier, der ofte opfattes som "smukke". Men hvad vil det sige at en generel teori, der beskriver mange fysiske fænomener, er "smuk" eller "elegant"? Hvordan kan skønheden i naturen oversættes til matematik og omvendt? Én af de ting der kendetegner de fundamentale fysiske love er, at de har en meget stor forklaringskraft og kun gør brug af få frie parametre. En teori med få parametre, der kan forklare mange fænomener har en højere status i kraft af dens større effektivitet. En anden vigtig egenskab ved en smuk teori er, at den bygger på fundamentale teoretiske principper, hvilket minder om matematikkens aksiomer.

## Matematik i antikkens naturvidenskab

Pythagoræerne arbejdede ud fra en tese om, at "hele Universet er behersket af matematiske lovmæssigheder, der kan udtrykkes som relationer mellem simple hele tal". Herfra stammer citatet, "Alt er tal", som skulle stamme fra Pythagoras.

Pythagoras fandt inspirationen til at beskrive alting ved hjælp af tal ud fra undersøgelser af instrumenter der kunne frembringe lyde. F.eks. ses det i strengeinstrumenter, at når tonerne er i indbyrdes harmoni, er der pæne talforhold mellem strengenes længder. Idéen om, at musik kan ordnes ved de hele tal og derved afspejler universets harmoni, blev videreudviklet i Platons "Timaeus". Matematik og musik har været tæt forbundet i mange hun-

drede år. Da Johann Sebastian Bach i 1722 komponerede ét stykke til hver af de 24 mulige tonarter på det moderne »veltempererede klaver«, fulgte han en systematik der var en matematiker værdig. Men idéen om at alt er tal førte også til mange vildfarelser hos pythagoræerne, som er refereret og kritiseret af Aristoteles.

For pythagoræerne havde tallene en mystisk betydning, nærmest en uafhængig realitet. Fænomenerne var noget sekundært og deres relevans bestod i hvordan de afspejlede tal. Det var tallene som var ansvarlige for harmonien, som var det guddommelige princip der bestemte strukturen af hele verden. På et sådant grundlag kan man kun frygte hvilke konklusioner der blev draget. Vi er allerede ude i talmystikken. Men det bliver værre. Tallene blev også tillagt moralsk betydning! F.eks. svarede "retfærdighed" til tallet 4 og "ægteskab" til tallet 5.

Der var på denne tid 9 kendte "planetsfærer": Jorden, Månen, Solen, Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn og Fiksstjernesfæren. Men for at få antallet til at passe med 10, som var et helligt tal, idet  $10=1+2+3+4$  som danner en 2 dimensional pyramide, opfandt Pythagoræerne en ikke-eksisterende planet – en "modjord", for at få deres system til at stemme. Den blev aldrig observeret.

Pythagoræerne havde også en idé om, at harmonien i musikken kunne bruges til at beskrive Universet eller planetsfærerne. Denne idé om "sfærernes harmoni" blev taget op i et musikteoretisk og temmelig mystisk værk af den unge Johannes Kepler. Han tillagde hver af planeterne en tone, som bestemte deres bevægelse. Mennesket kan imidlertid ikke høre disse toner, fordi vi har vænnet os til tonerne fra vi er født, og derfor kan vi ikke længere opfatte dem. Kepler brugte de platoniske legemer eller regulære polyedre, indskrevet i hinanden, til at forklare solsystemets opbygning. Det er bemærkelsesværdigt, at den samme person som i sin ungdom tilsluttede sig hele den pythagoræiske talmystik (som i dag vil blive betegnet som pseudovidenskab) senere er mester for at udvikle de dynamiske naturlove, som astronomer og fysikere stadig bruger i dag.

Bevægelseslovene for legemer på jorden og i himlen blev fundet af Galilei og Kepler og sammenfattet af Newton, som også udviklede differentialregningen til formålet. Den bygger på *kontinuitet*, hvorfor de simple talforhold, som pythagoræerne talte om, er helt utilstrækkelige.

Da de græske elementarfilosoffer Demokritos og Leukippos beskrev den første filosofiske atomlære, havde Pythagoras allerede beskrevet geometriske punkter som de mindste dele. Demokritos tilføjede i virkeligheden blot "masse" til punkterne og havde så de mindste *stofdele*. Men på denne filosofiske idé nåede atomisterne væsentlig længere i retning af en materialistisk videnskab end

pythagoræerne og dem der beskæftigede sig med de fire elementer.

I dag beskriver fysikken næsten alt ved atomer, der er opbygget af mindre kvantepartikler. Disse har fundamentale egenskaber (f.eks. ladning og spin), der er beskrevet ved \*kvantetal.\* Så den gamle Pythagoras havde næsten ret, hvis vi siger at »Alt er kvantetal«. Fysikere i dag anser kvantemekanikken for at være en af de fundamentale teorier for naturen. Selv rummet og tiden er sandsynligvis kvantiseret, så de skal beskrives ved diskret matematik på det mest fundamentale plan.

## Almen relativitetsteori

Et af de bedste eksempler på en fysisk teori der forklarer meget og samtidig er elegant er Einsteins almene relativitetsteori, som er den hidtil bedste teori for tyngdekraften. Denne teori bygger på to antagelser:

1. Formen på naturlovene må ikke afhænge af valget af koordinatsystem
2. En person kan ikke mærke forskel på om han befinder sig i et tyngdefelt eller er i bevægelse med konstant acceleration i et rum uden et tyngdefelt (ækvivalensprincippet).

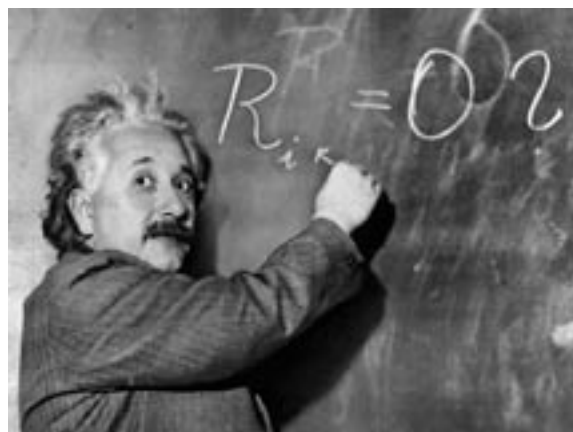
Den første antagelse er indbygget i Einsteins specielle relativitetsteori fra 1905. Denne teori beskriver hvordan et legeme opfattes af en observatør med en bestemt hastighed relativt til legemet. Hvis legemet bevæger sig tæt på lysets hastighed, som er den maksimale hastighed i naturen, fortæller teorien hvordan tiden og rummet opfører sig og påvirker hinanden. Teorien var et radikalt brud med opfattelsen af tiden som en absolut størrelse der var helt uafhængig af rummet. Einstein påstod at rum og tid var flettet sammen.

Einstein indså i 1907, at der var en forbindelse mellem tyngdekraften og accelererede bevægelser: Hvis en person er i frit fald vil han ikke føle sin egen vægt. Den specielle relativitetsteori beskriver kun bevægelser med konstant hastighed og han forsøgte nu at udvikle en mere almen relativitetsteori der også kunne beskrive accelererede bevægelser. Denne teori ville samtidig kunne beskrive tyngdekraften.

Den specielle relativitetsteori mødte meget modstand og da matematikeren Hermann Minkowski i 1908 formulerede den specielle relativitetsteori *geometrisk* ved hjælp af en firedimensional rumtid, følte Einstein at han selv ikke længere kunne forstå den. Lidt firkantet kan man sige, at Minkowski tilføjede *tiden som den fjerde dimension* ved at gange lysets hastighed på. Afstanden mellem to begivenheder i tid //og rum// kan med et værktøj indenfor differentialgeometrien opskrives i en //metrik//,  $ds^2$ . Kvadraterne på de tre rumkoordinater summeres og herfra skal tidsleddet,  $c^2 dt^2$ , \*trækkes fra\*, da tiden opfører sig anderledes end rummet:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

Hvad enten man forstår relativitetsteorien eller ej, må man indrømme at denne ligning er smuk i al sin enkelhed. Der er symmetri mellem de tre rumkoordinater, der summeres som det kendes fra Euklidisk geometri. Pythagoras'



sætning siger, at kvadratet på længden af hypotenusen i en retvinklet trekant er lig summen af kvadraterne på de enkelte sider. Dette kan udvides til 3 dimensioner og afstandene kan være vilkårligt små. Men tiden falder udenfor: Tiden kan opfattes som en *imaginær* rumdimension idet:  $i^2 c^2 dt^2 = -c^2 dt^2$ .

Da Einstein havde lært differentialgeometrien erkendte han, at den nye geometriske beskrivelse af rumtiden var et vigtigt skridt i retning mod at formulere en teori for tyngdekraften – den almene relativitetsteori. Der er ingen tvivl om, at teorien blev mere klar ved at blive omformuleret af en matematiker, selv om Einstein i starten havde svært ved at forstå den, bl.a. fordi tiden ikke summerede som i Euklidisk geometri.

Ækvivalensprincippet hævder, at en observatør ikke kan afgøre ved noget eksperiment om han er udsat for et tyngdefelt eller en konstant acceleration. Alle massive legemer har en "modvilje" mod at blive accelereret fordi de har en "inertiel masse" og denne masse har præcis samme størrelse som den gravitationelle masse, der kan måles på en vægt. Det var allerede kendt af Newton at den inertielle masse og den gravitationelle masse var lige store. Men da Einstein indså at accelerationen af et legeme i frit fald *netop udlignede* legemets vægt, var han på sporet af en ny teori for tyngdekraften.

Han erkendte nu, at man kunne beskrive accelererede bevægelser som en *krumning af rumtiden*. F.eks. vil lys altid bevæge sig langs en ret linje, men i et krumt rum kan dette godt være en kurve der buer ligesom længdegraderne på Jordens overflade. De kaldes også nulgeodæter.

Einstein kunne altså ikke nøjes med Euklidisk geometri, men skulle bruge en geometri med krumning og med flere dimensioner. Den var heldigvis udviklet af bl.a. Gauss og Riemann i starten af 1800-tallet. Disse matematikere var begge interesserede i det fysiske rums natur (se Matilde nr. 20, 2004). Efter at have undersøgt de matematiske mulige geometrier forsøgte Gauss at måle geometrien af det rum vi lever i, men han fandt ingen afvigelser fra den Euklidiske geometri.

Når man tænker på hvor mange grå hår i hovedet det gav Einstein bare at sætte sig ind i hvordan den ikke-Euklidiske geometri skulle anvendes i fysikken, kan man godt tvivle på hvor langt den almene relativitetsteori overhovedet var nået, hvis også matematikken skulle udvikles.

Dette eksempel viser hvor vigtigt det kan være for fysikkens udvikling at matematikerne generaliserer resultater og beviser dem systematisk så når de engang skal anvendes, er der en hel værktøjskasse af begreber og me-



toder som fysikerne kan anvende. Det kan også være til stor hjælp at matematikere hjælper med at udpege hvilken matematik der er mest optimal til et bestemt problem.

Einstein drømte om at formulere en forenet feltteori, der beskrev alle naturkræfterne. Denne drøm har bl.a. ført til at en meget stor del af vore dages teoretiske fysikere arbejder med *strengteori*, der er endnu et eksempel på hvordan fysik og matematik griber ind i hinanden.

## **Strengteori – teorien om alt eller intet**

Allerede i 1920'erne fandt fysikerne Theodor Kaluza og Oscar Klein ud af, at man kunne beskrive elektromagnetismen indenfor rammerne af Einsteins almene relativitetsteori ved at *tilføje en femte dimension*. Denne ekstra dimension må være sammenrullet, eller kompaktificeret. Hvis elektriske og magnetiske felter kan bevæge sig i en ekstra 5. dimension må denne være mikroskopisk sammenlignet med de store dimensioner vi kender. Hvis dimensionen er rullet sammen i en lille cirkel med stor krumning, ligner det bare et punkt set på store afstande. Teorien havde imidlertid nogle fundamentale problemer og blev forladt.

I 1960'erne udviklede fysikere en model for partikler (mesoner) der er bundet sammen af den stærke kernekraft, hvor de fundamentale partikler blev erstattet af *streng*. Men teorien havde nogle problemer – den kunne ikke forklare fermioner og den forudsagde tachyoner, dvs. partikler der bevæger sig hurtigere end lyset, hvilket ikke er observeret. Teorien blev snart udkonkurreret af den mere succesrige model med kvarker og gluoner.

I 1980 kombinerede Schwarz og Green de to idéer: strenge og ekstra dimensioner. Derudover tilføjede de en ny symmetri – supersymmetri – mellem stofpartikler (fermioner) og kraftpartikler (bosoner). Med de supersymmetriske mangedimensionale strenge kunne de forklare tyngdekraften som en kvanteteori. Dette havde hidtil været umuligt og ført til uendeligheder i udregningerne, men problemet blev tilsyneladende løst med disse "supersynge".

Strengteorien kan – på papiret – løse flere af den teoretiske fysiks store problemer. De uendeligheder der opstår i traditionel kvantefeltteori i udregningerne af vekselvirkninger mellem punktpartikler på korte afstande undgås. Men prisen er, at strengene kræver mange ekstra dimensioner som ikke er blevet påvist eksperimentelt.

Den fundamentale længdeskala for strengene er  $10^{-35}$  meter, som kaldes Planck-længden, og det er reelt først på denne skala at den fulde strengteori bliver relevant. Eksperimenter i dag kan kun undersøge stoffet ned til ca.  $10^{-18}$  meter, så der er lang vej endnu, idet hver størrelsesorden kræver en større partikelaccelerator.

Den nye "supersymmetri" mellem partiklerne og kræfterne i naturen forudsiger et væld af nye partikler som man heller ikke har fundet eksperimentelt. Supersymmetrien forudsiger en ny partikel for hver af de kendte partikler, og en forklaring på hvorfor man ikke ser nogen af disse supersymmetriske partnere kunne være, at de først dannes ved højere energier. Ved de lave energier som er almindelige i vore dages univers, må supersymmetrien være brudt. Man håber på at detektere supersymmetriske partikler i fremtidige eksperimenter. Set fra et eksperimentelt synspunkt virker det ikke særlig smart at indføre en

symmetri man ikke har set i noget eksperiment og oven i købet hævde, at symmetrien er brudt så man ikke kan se den med nutidens eksperimenter. Når man begynder at »lapse« på teorierne på denne måde kommer man til at tænke på epicykelteorien for planeternes bevægelser, hvor der blev tilføjet flere og flere cirkler ovenpå de første cirkler, for at teorien passede med observationerne.

Nogle strengfysikere mener, at supersymmetrien er så smuk, at den må være rigtig - bl.a. fordi det er en af de mest naturlige udvidelser af Einsteins almene relativitetsteori. Men det er ikke bevis nok. Supersymmetriens - og dermed strengteoriens - succes afhænger bl.a. af om de forudsagte supersymmetriske partikler virkelig bliver observeret. Dette kan måske ske allerede indenfor de nærmeste år i den europæisk partikelaccelerator »Large Hadron Collider«, der har været omkring 15 år undervejs.

Supersymmetriske partikler er også foreslået som kandidat til det mørke stof som er blevet observeret indirekte i Universet. Så der er også en mulighed for at bekræfte forudsigelser fra strengteorien gennem kosmologiske observationer.

Strengteorien forsøger at beskrive tyngdekraften som en kvanteteori med en statisk baggrund, hvor Einsteins teori er en feltteori med en dynamisk rumtid. Tyngdekraften antages at blive formidlet kvantemekanisk gennem gravitoner som er analoge til elektromagnetismens fotoner, men ingen har observeret disse gravitoner. De versioner af strengteorien som har en statisk baggrund er altså i konflikt med klassisk rumtid.

De fleste fysikere betragtede derfor teorien med skepsis, idet der hverken kunne observeres ekstra dimensioner eller supersymmetri og der var ingen forudsigelser der kunne sammenlignes med eksperimenter. Siden kom der flere versioner af strengteorien til og billedet blev mere mudret. Det viste sig også, at proceduren for hvordan de ekstra dimensioner skal foldes sammen ikke er entydig.

Hvis ikke der er en entydig formulering af strengteorien svækkes dens troværdighed, og hvis en udgave af strengteorien er korrekt – hvilken én af de mange udgaver er det så?

I 1995 kom en ny revolution af strengteorien, da det viste sig at forskellige versioner af strengteorien havde dybe forbindelser som antydede, at de måske alle var aspekter af den samme mere fundamentale teori, som blev kaldt "M-teori". De forskellige versioner var forbundet med dualiteter, som gjorde det muligt at bygge broer mellem forskellige versioner af strengteorien.

Siden denne 2. strengrevolution har strengteorien af mange teoretiske fysikere nærmest fået status af "fysikkens hellige gral" og det kan i dag være vanskeligt at få penge til at forske i alternative teorier. Strengteorien er nærmest blevet det dominerende paradigme længe inden teorien har fået bekræftet en eneste forudsigelse eksperimentelt! Det anses af flere fysikere for at være et alvorligt problem for den teoretiske fysik i dag, hvilket bl.a. påpeges af Lee Smolin i bogen "The trouble with physics - The rise of string theory, the fall of a science and what comes next", der udkom i 2006.

De senere års udvikling af "M-teorien" har ført til endnu flere objekter, der lever i flere dimensioner og som ikke er observeret – de såkaldte "braner". Set udefra ligner det hele et luftkastel der meget let kan falde sammen. Masser af matematik, men meget lidt fysik. Hvis



strengteorien har mistet forbindelsen til virkeligheden og blot genererer flere og flere objekter, som konsekvens af ekstra dimensioner og symmetrier der ikke findes, så gør strengteorien måske mere skade end gavn. I mange lande går størstedelen af forskningsmidlerne i teoretisk fysik i dag til strengteori og det er svært at få penge til at forske i alternative teorier.

Selv om der kan være fornuft i at beskrive visse fysiske egenskaber ved elementarpartikler som bevægelser i en kompakt ekstra dimension, kan det endnu ikke afgøres om det afspejler virkeligheden, om det bare er en smart regneteknik, eller noget helt tredje. I fysik er det i sidste ende eksperimentet der afgør om en teori kan bekræftes eller skal forlades. Det er derfor alvorligt når strengteorien selv efter 20 år endnu ikke kan forklare de partikler der eksisterer, men tværtimod bliver ved med at forudsige objekter som ikke kan observeres.

Der mangler måske en ny Einstein som kan rydde op i de mange teorier og finde frem til den væsentlige nye fysik. Einstein erstattede de gamle definitioner af tid, rum, kraft, masse og energi med nye der var afledt af sammensatte begreber som "masse-energi" og "rum-tid". Han arbejdede de sidste 25 år af sit liv på at forklare disse sammensatte størrelser ud fra feltbegrebet. Hvad ville han sige til situationen i dag?

Hvis strengteorien viser sig at være korrekt er det en teori for alting: Både de fundamentale partikler og kræfterne der virker imellem dem kan beskrives ved strenge. Selv baggrunden af rum og tid kan måske beskrives som et kondensat af strenge i deres grundtilstand. Partikler, der bevæger sig gennem rumtiden, kan beskrives som excitationer. På dette område ville Einstein nok blive tiltrukket af teorien, da alt kan afledes af ét begreb.

Men satsningen er måske for stor, for hvis det grundlag strengteorien hviler på ikke passer med virkeligheden, falder hele teorien sammen.

Strengfysikere har hidtil levet lidt beskyttet ved at strengteoriens forudsigelser ikke kunne testes i eksisterende partikelacceleratorer. De har bl.a. kaldt strengteorien for "et stykke fysik fra det 21. århundrede som ved et tilfælde er landet i det 20. århundrede", for at understrege at det er en teori der først bliver relevant i fremtiden. Men det kan ligeså godt være science fiction.

Dette aspekt ville heller ikke genere Einstein, der havde en stærk tro på sin teori, selv om mange af dens forudsigelser først blev bekræftet årtier senere. Men Einstein ville ikke bryde sig om at tyngdekraften i strengteori beskrives som en kvanteteori i en stationær baggrund, i modsætning til hans dynamiske rumtid. Han havde en fundamental skepsis overfor kvanteteorien.

## Tyngdekraften og gravitonen

Den almene relativitetsteori kan ikke forklare hvordan Universet opstod i "The Big Bang", men beskriver udviklingen derefter ret detaljeret og i overensstemmelse med de fleste observationer. Den tidligste fase af Universets udvikling beskrives af inflationsteorien, hvor en næsten tom region af rum og tid vokser eksponentielt, for derefter at munde ud i den kosmiske ildkugle af partikler og stråling som vi normalt forbinder med Big Bang. Hvis strengteorien skal have succes skal den give en forklaring på hvordan inflationen startede. Det har den ikke gjort

endnu. Men der er kommet et scenario fra strengteorien, hvor to braner som lever i 5 dimensioner kolliderer og resulterer i noget der minder om Big Bang begivenheden.

Det er håbet, at strengteorien vil kunne forklare mørkt stof og mørk energi, eller hvis de ikke eksisterer, afgøre hvordan og hvorfor tyngdekraften er modificeret på store skalaer. I kosmologiens standardmodel udgør den mørke energi ca. 70 % og det mørke stof ca. 26 % af Universets samlede energi. Resten er atomer, der vekselvirker med lys. Hvis ikke strengteorien kan forklare hvad de 96 % af Universet er som ikke kan ses, må der søges en anden teori.

I 1996 blev det foreslået af Edward Witten, at nogle af de ekstra dimensioner kan være meget større – måske helt op til 1 mm – og at det kun er tyngdekraften (gravitonen) der kan bevæge sig i de ekstra dimensioner. Dette kunne forklare hvorfor tyngdekraften er så meget svagere end de øvrige kræfter, ca.  $10^{40}$  gange svagere end elektromagnetismen. Eksperimenter, der har undersøgt om tyngdekraften afviger fra Newtons  $1/r^2$ -afhængighed har endnu ikke fundet afvigelser der tyder på at der forsvinder noget af kraften ind i ekstra dimensioner. Men her er måske en forudsigelse som kan testes indenfor de kommende år.

Rumtiden i almen relativitetsteori er dynamisk, mens den simpleste baggrund i strengteorien er statisk. Der findes teorier hvor strenge bevæger sig på en mere kompliceret baggrund, dvs. en baggrund hvor den kosmologiske konstant ikke er nul, eller en hvor baggrundsgeometrien varierer i tiden eller hvor baggrunden indeholder braner og andre felter. Der er bl.a. gjort forsøg på at beskrive visse egenskaber ved elementarpartikler ved hjælp af et Anti-deSitter rum, der svarer til en *negativ* kosmologisk konstant. Nyere kosmologiske målinger tyder imidlertid på, at Universet som helhed har en *positiv* kosmologisk konstant. Kan rummet være så forskelligt på store og små skalaer?

I fremtiden må strengteoretikerne udvikle strenge der vekselvirker med den baggrund (rumtid) de bevæger sig i, for i højere grad at bevare kvaliteten ved Einsteins almene relativitetsteori. Her kan gravitonen måske vise sig at bane vejen, idet man kan beskrive et tyngdefelt som et enormt antal gravitoner der tilsammen kan vibrere på en måde som kan minde om rumtidens krumning.

En alternativ strategi til strengteori er, at erstatte den almindelige geometri med en *ikke-kommutativ geometri* / /, hvorved de traditionelle begreber om rum og afstande mellem punkter går i opløsning og erstattes af helt nye begreber. Matematikkens indtog i den teoretiske fysik er tilsyneladende kun lige begyndt!

En anden strategi er at erstatte den almindelige geometri med en ikke-kommutativ geometri, hvorved de traditionelle begreber om rum og afstande mellem punkter går i opløsning og erstattes af helt nye begreber. Matematikkens indtog i den teoretiske fysik er tilsyneladende kun lige begyndt!

Der er en vis fare for at strengfysikerne er blevet forblændet af den matematiske skønhed der følger af teoriens mange symmetrier og har glemt at den gerne skulle have noget med virkeligheden at gøre for at være en fysisk teori. Det er ikke alle idéer som man kan forestille sig, der eksisterer i virkeligheden, men så længe der er fænomener i naturen som ikke er forklaret er der i princippet plads til ny matematik.

